球面定在波の性相と形状

戸　上　　良　弘
TOGAMI Yoshihiro

１．同心球面対共振回路

１．１　複素点電荷

電気は目に見えないが、疑いなく存在する。電気にはプラスの電荷とマイナスの電荷がある。磁気にはN極とS極がある。磁気は必ずセットで現れ、N極だけ、あるいはS極だけ、という磁荷（磁気単極）は存在しない。一方、電荷はそれぞれプラス、あるいはマイナスの電荷が単独でも存在すると考えられている。

しかし、ここで「いかなるものも単独で授受することはできないので、それが存在するための力を起こすには、必ず授受作用ができる主体と対象との二性性相として存在しなければならない」と考えるならば、電気の基本形状である点電荷も、単独で存在するという考え方を改める必要があろう。

そこで、電荷それ自体がプラスとマイナスの立場を周期的に入れ替える複素点電荷の存在を仮定する。

$$\text{複素点電荷：} q = q_0 e^{i\omega t} \qquad (1)$$

ここで q_0 は電荷の大きさ、ω は角周波数、t は時間変数、i は虚数単位、e は自然対数の底である。$e^{i\omega t}$ の大きさは１であるが、$(+1) \to (+i) \to (-1) \to (-i) \to (+1)$の順に位相変化する（図１）。

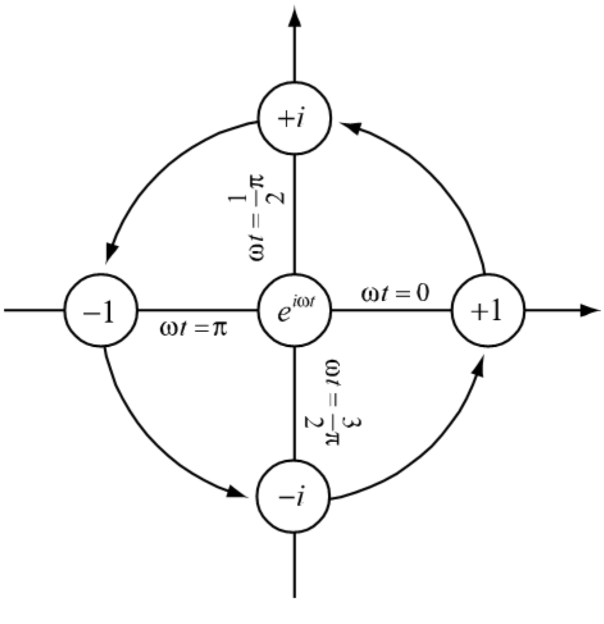

図１　$e^{i\omega t}$の位相変化

１．２　同心球面対

一つの中心を共有する同心球面対の形状を考える（図２）。内側の球面を主体とし外側の球面を対象として、互いに授受作用できる形状である。そして内側の球面に複素点電荷を配置する。中心の電荷がプラスからマイナスに変化（減少）するとき、その量の時間変化に応じた電流が中心から外側に向かって流れ出る。電流は面に対して垂直（90度）の方向に流れ、球対称の電流場を作る。

一般に球対称の電流場というのは存在しえないと考えている人が多い。放射状に流れ出た電流を何らかの方法で中心に戻さないと電流の閉回路を作ることができないからである。仮に戻せたとしても球の対称性が崩れてしまう、と考えるからである。

しかし、この場合そのような心配は必要ない。電荷が周期的に変化するため、電流は直流ではなく交流となる。中心から流れ出る実電流と、同量で逆向きの変位電流が同時に外側から内側に向かって流れ入る。そのため図３のように内側と外側の面を垂直方向に往復（授受作用）する球対称の電流場ができ、閉回路を形成する。

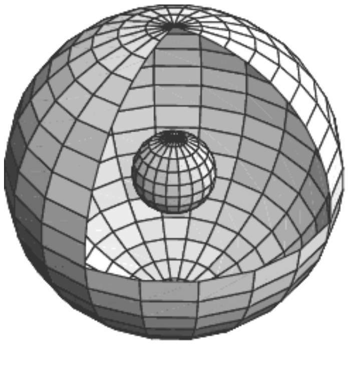

図２　同心球面対

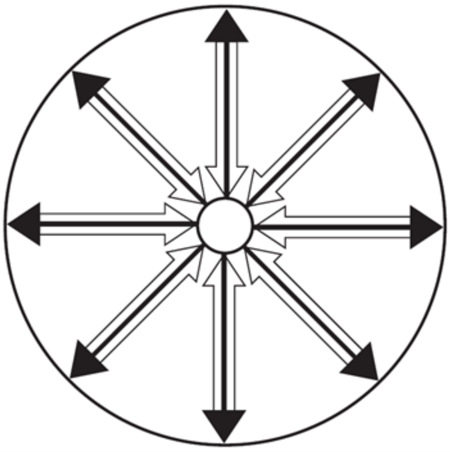

図３　球対称の電流と同量逆向きの変位電流

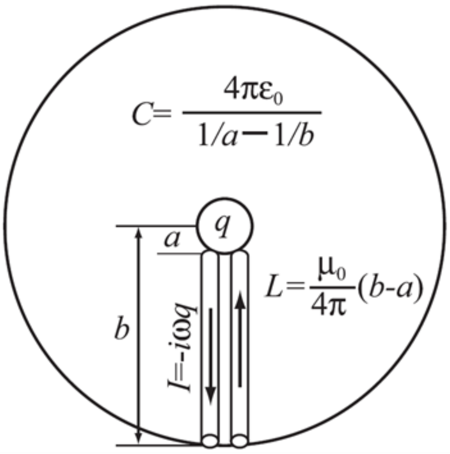

図４　同心球面対の電気的等価回路

１．３　同心球面対の電気的等価回路

図４に同心球面対の電気的等価回路を示す。同心球面対を球形コンデンサとして捉えたとき、そのキャパシタンス C は次式で表される。（ただし、ε_0 は真空の誘電率）

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{2}$$

コンデンサに電荷 q が与えられたとき、コンデンサに蓄えられる電気的エネルギーU_eは一般に $U_e = \frac{1}{2}q^2/C$ で表される。ここで、$q = q_0 e^{i\omega t}$ とすれば、$q^2 = q \cdot q^* = {q_0}^2$となるので、同心球面対に蓄えられる電気的エネルギーは次式で表される。

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{{q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{3}$$

次に、球対称の電流場が作るエネルギーを考える。電流と変位電流は同量逆向きであること、また球の対称性から、電流によって作られる磁場は球の外部には現れない。しかし、内部的には電流による磁気的エネルギーとして蓄えられると考えられる。

一般に無限長の針金の断面に一様に電流が流れるとき、針金の内部インダクタンスは針金の太さに関係なく、単位長あたり $\mu/8\pi$ であることが知られている。同心球面対の内面と外面を垂直に往復する経路長を $2(b-a)$ と考え、真空中の透磁率 μ_0 を用いれば、等価インダクタンス L は次式で見積もることができる[1]。

$$L=\frac{\mu_0}{4\pi}(b-a) \tag{4}$$

１．４　同心球面対共振回路の共振条件

電荷が $q=q_0e^{i\omega t}$ で時間変化するとき、電流は $I=-dq/dt=-i\omega q$ となる。一般にインダクタンス L のコイルに電流 I が流れるとき、蓄えられる磁気エネルギーは $U_i=\frac{1}{2}LI^2$ と表される。ここで、$I^2=I\cdot I^*=\omega^2{q_0}^2$ から、同心球面対を垂直に往復する電流による磁気的エネルギーは次式で表される。

$$U_i=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\mu_0}{8\pi}(b-a)\omega^2{q_0}^2 \tag{5a}$$

ここで、光速 c と真空中の誘電率・透磁率の関係 $c^2=1/\mu_0\varepsilon_0$ を用い、角周波数 ω と波数 k との関係 $\omega=kc$ を用いると、次式のように書き直せる。

$$U_i=\frac{{q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0}k^2(b-a) \tag{5b}$$

さて、安定して存在するためには、電気的エネルギー U_e と磁気的エネルギー U_i を交換しながら自己共振（授受作用）していると考えよう。両者のエネルギーが等しいと置いて解くと、次の共振条件が得られる。

$$\text{共振条件：}\quad k^2ab=1 \tag{6}$$

また同心球面対共振回路の共振周波数 f は、 $f=2\pi\omega=2\pi kc$ より次式で与えられる。共振周波数は内径 a と外径 b の相乗平均に逆比例することが分かる。

$$f=\frac{c}{2\pi\sqrt{ab}} \tag{7}$$

２．球面定在波

前節では、電気回路の考え方で共振条件などを求めた。しかし、量子効果を問題にする領域では波動として考える必要がある。

２．１　複素振幅を持つ球面波の内部波動

複素点電荷はその周りに電位、すなわちポテンシャルの変化をもたらす。その変化は、実際には波動として伝搬すると考えられる。そこで半径 a の中心面に存在する波源の遅延ポテンシャルとして、中心からの距離 r と時間 t の関数で波動を表したのが次の(8a)式である。ただしこの波動の存在範囲は半径 a の内球面から半径 b の外球面までである。またq_0は波源の振幅係数と見ることができるが、結果的に電荷の大きさに等しいと考えてよい。

$$\varphi(r,t)=\frac{q_0 e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{8a}$$

上記(8a)式は複素振幅を持つ波動であるが、実数部分をとれば、次式で表される。

$$Re[\varphi(r,t)]=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{cos(\omega t-kr)}{r} \tag{9}$$

これは等位相面が外側に移動するから外向きの球面波である。しかし、量子効果が表れる領域では、波動の振幅は本質的に複素数となることが知られているので、安易に実数部分だけを取り出すことは避けた方がよい。

複素振幅を持つ上記の(8a)式で表される波動式は恒等的に以下のように分解できる。

$$\varphi(r,t)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}+\frac{1}{2}\frac{e^{i(\omega t+kr)}}{r}\right)+\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}-\frac{1}{2}\frac{e^{i(\omega t+kr)}}{r}\right) \tag{8b}$$

上記(8b)式の右辺第１項は外向きの球面波と内向きの球面波を和によって合成した波動であり、媒質の圧力変化を表す波動である。また、右辺第２項は外向きの球面波と内向きの球面波を差によって合成した波動であり、媒質の流れを表す波動である。

指数関数と三角関数の関係、$\frac{1}{2}\left(e^{-ikr}+e^{ikr}\right)=cos\,kr$、$\frac{1}{2}\left(e^{-ikr}-e^{ikr}\right)=-i\,sin\,kr$を用い、虚数係数を時間的位相のずれ $-i=e^{i(-\pi/2)}$ と捉えれば、さらに以下のように表現することができる。

$$\varphi(r,t)=\frac{q_0 e^{i\omega t}}{4\pi\varepsilon_0 r}cos\,kr+\frac{q_0 e^{i(\omega t-\pi/2)}}{4\pi\varepsilon_0 r}sin\,kr \tag{8c}$$

図５はこの(8c)式を図式化したものである。時間的位相の 90 度ずれた二種類の空間的定在波が、時間的位相ωで回転している状態と見ることができる[2]。

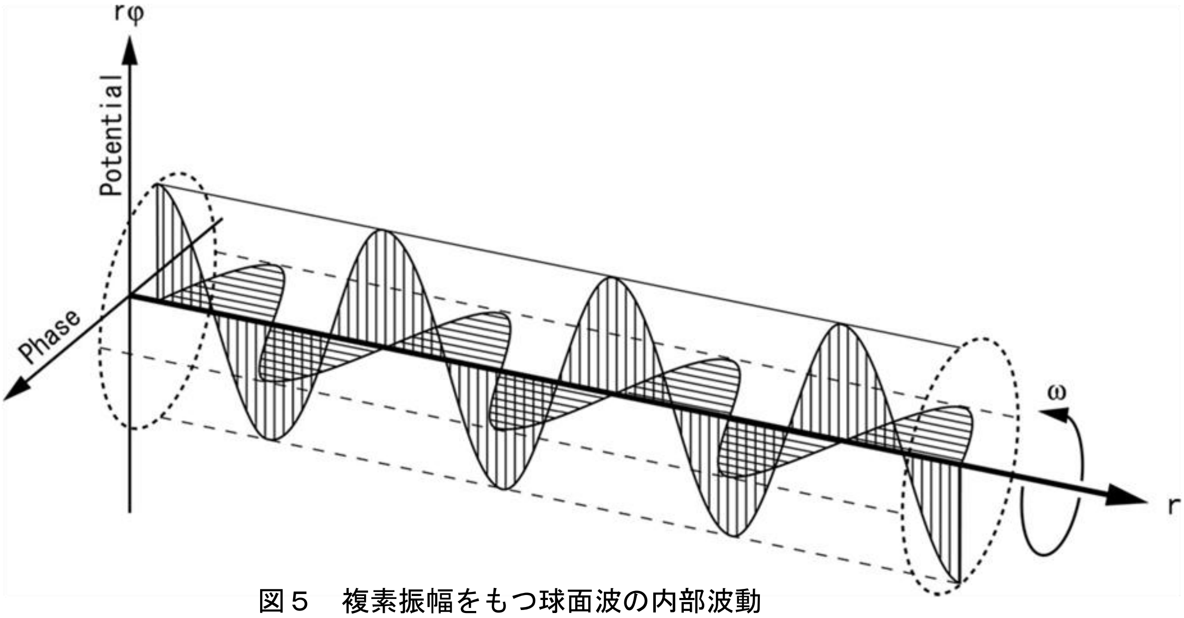

図５　複素振幅をもつ球面波の内部波動

２．２　球面定在波の内部エネルギー

一般に電界 E によって作られるエネルギー密度は、$(1/2)\varepsilon_0 EE^*$と表される。この意味は、E と共役な電界 E^*を別に想定し、相互作用のエネルギーを計算する。1/2 の因子は互いに二重に算出した分を半分に補正するためである。

球面定在波の内部エネルギーを考える。内部波動の振幅は外部波動の振幅の 1/2 であることと、共役な波動がすでに内在していることから、エネルギー密度は$\varepsilon_0(\mathrm{E}/2)(\mathrm{E}^*/2)$で計算する。

$$E = -\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r} = \frac{\varphi(r,t)}{r} + ik\varphi(r,t) \tag{10a}$$

$$E^* = -\frac{\partial\varphi^*(r,t)}{\partial r} = \frac{\varphi^*(r,t)}{r} - ik\varphi^*(r,t) \tag{10b}$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{E}{2}\right)\left(\frac{E^*}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0}{4}\left(\frac{\varphi\varphi^*}{r^2} + k^2\varphi\varphi^*\right) = \frac{{q_0}^2}{64\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2}\right) \tag{10c}$$

球面定在波が存在する区間 $[a, b]$ におけるエネルギーU は次の式で計算される。

$$U = \int_a^b \frac{{q_0}^2}{64\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2}\right)4\pi r^2\,dr = \frac{{q_0}^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{{q_0}^2}{16\pi\varepsilon_0}k^2(b-a) \tag{11}$$

上記(11)式の右辺第１項は電気的エネルギーを、右辺第２項は磁気的エネルギーを表している。安定して存在するためには内部的に共振状態にあると考えよう。両者のエネルギーが等しいと置けば、以下の共振条件を得る。これは電気回路として求めた共振条件と同じ式になる。

$$\text{共振条件：}\quad k^2ab = 1 \tag{6}$$

この共振条件を満たすとき、エネルギーUは次のように表わされる。

$$U = \frac{{q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{{q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0}k^2(b-a) = \frac{\mu_0 {q_0}^2}{8\pi}c^2k^2(b-a) \tag{12}$$

２．３　量子条件

球面定在波の振幅係数の自乗${q_0}^2$を電荷素量の自乗e^2に置き換えると、(12)式のエネルギーUは次のように書きかえられる。（自然対数の底と同じ記号を使うので紛らわしいが、ここでの e は電荷素量を表す記号である。）

$$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}k^2(b-a) \tag{13}$$

ところで、微細構造定数 α という無次元の定数があり、その関係式は次式で与えられる。また、その逆数である$1/\alpha$は約 137 であることが知られている。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \tag{14}$$

その微細構造定数 α を用いて(13)式を整理すると、次式になる。

$$U = \frac{\hbar c\alpha}{2}k^2(b-a) \tag{15}$$

最低エネルギー状態である基底状態を考える。電子のような素粒子は、スピン 1/2 という状態を取ることが知られている。スピン 1/2 という状態は、時間的位相半回転（$\omega/2$）あたりのエネルギー量子が $\hbar$ になる状態と捉えることができる。よって基底状態の量子条件は、次式で与えられる[3]。

$$U = \hbar\frac{\omega}{2} \tag{16}$$

$\omega = kc$の関係に注意し、この量子条件(16)式とエネルギーの(15)式から、次の関係式を得る。

$$kb - ka = \frac{1}{\alpha} \tag{17}$$

この式の意味は、波数 k で規格化された外径 kb と内径 ka の位相距離が、微細構造定数の逆数、すなわち約 137 であることを示している。

２．４　定量的考察

共振条件の式(6)と、エネルギーおよび量子条件の式(17)から、次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} k^2ab = 1 \\ kb - ka = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases} \tag{18}$$

これを ka、kb について解く。

$$\begin{cases} ka = -\dfrac{1}{2\alpha} \pm \dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{1+4\alpha^2} \\ kb = \dfrac{1}{2\alpha} \pm \dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{1+4\alpha^2} \end{cases} \tag{19}$$

ここで、$1/\alpha \simeq 137$であり、$4\alpha^2 \ll 1$ であるから、$0 < ka < kb$ として解は近似的に次のように求まる。

$$\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha \\ \dfrac{1}{\alpha} + \alpha \end{pmatrix} \tag{20}$$

外径 b と内径 a の内外径比 b/a は、次のように計算される。

$$\frac{b}{a} = \frac{kb}{ka} \simeq \frac{1}{\alpha^2} + 1 \tag{21}$$

表 1 は球面定在波の基底状態における規格化内径 ka と規格化外径 kb を、微細構造定数を用いて表したものである。

表１　球面定在波の基底状態における形状

名称と記号	式	値
微細構造定数 α の逆数	$1/\alpha$	137.035999
規格化内径 ka	$ka = -\dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{1+4\alpha^2} \simeq \alpha$	0.00729696398
規格化外径 kb	$kb = \dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{1+4\alpha^2} \simeq \dfrac{1}{\alpha} + \alpha$	137.043296
内外径比 b/a	$kb/ka \simeq \dfrac{1}{\alpha^2} + 1$	18780.8652

表２は球面定在波の各種計算値を既存の物理定数と比較した表である。外径 b は水素原子の基底状態における原子半径として用いられるボーア半径を当てはめた。内径 a は表１の内外径比を用いて計算した。電子の質量などと、計算値がよく一致していることが分かる[2]。

表２　ボーア半径を外径とする球面定在波の基底状態

名称と記号	計算式	計算値	比較値※
外径 b	ボーア半径を利用	―	※ボーア半径 5.2917721×10^{-11}[m]
内径 a	内外径比を利用	2.81764×10^{-15}[m]	※電子の古典半径 2.8179403×10^{-15}[m]
波数 k	$k=1/\sqrt{ab}$	2.58974×10^{12}[1/m]	―
波長 λ	$\lambda=2\pi\sqrt{ab}$	2.42618×10^{-12}[m]	※電子のコンプトン波長 2.4263102×10^{-12}[m]
周波数 f	$f=\dfrac{c}{2\pi\sqrt{ab}}$	1.23565×10^{20}[Hz]	―
エネルギー U	$U=\dfrac{\mu_0}{4\pi}e^2k^2c^2(b-a)$ $=\hbar kc$	8.18754×10^{-14}[J]	―
質量 m	$m=\dfrac{U}{c^2}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}e^2k^2(b-a)$ $=\dfrac{\hbar k}{c}$	9.10987×10^{-31}[kg]	※電子の質量 9.1093819×10^{-31}[kg]

（ c は光速、e は電荷素量、$\hbar=h/2\pi$、h はプランク定数、比較値※は理科年表による。）

参考文献

[1] 戸上良弘、「同心球面対における共振回路」、帝塚山学院短期大学　研究年報 46、pp.62-74、1998.

[2] 戸上良弘、「球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部　研究年報　第 7 号、pp.143-152、2005.

[3] 戸上良弘、「球面定在波のエネルギー遷移に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部　研究年報　第 8 号、pp.121-129、2006.

（2009 年 8 月 24 日　脱稿）